Atelier de philosophie, 24 mai 2014 :

Paradigme géométrique et histoire des sciences

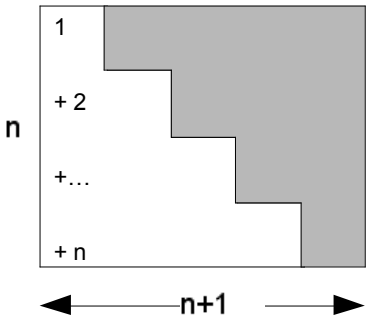
L'idée du thème de ce jour est venue d'une discussion entre JM Muglioni et moi, au cours de laquelle j'évoquais deux styles ou deux tempéraments de mathématiciens, les « géomètres » qui recourent à des images, et les « algébristes », qui sont du côté du calcul ou du discours. Mais cette opposition simpliste vaut d'être un peu approfondie, et appréciée dans ses conséquences sur les paradigmes scientifiques hors des mathématiques.

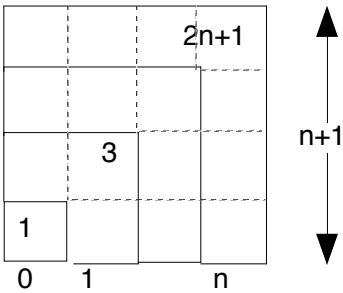
C'est donc un regard sur la géométrie, son évolution, et quelques-unes de ses conséquences que je vous propose, sinon dans toutes les sciences, du moins en astronomie, dont j'ai gardé quelques souvenirs.

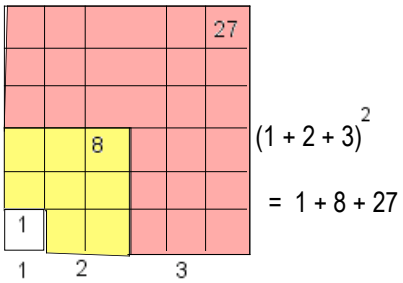
1. Géométrie, calcul, discours

Antiquité : la Géométrie d'Euclide est imagée mais discursive. Une démonstration est un discours (codifié) appuyé sur une figure (considérée comme schéma), mais qui n'en est pas l'observation. Elle est dissociée de la mesure des grandeurs (un rapport n'est pas considéré comme un nombre).
La tradition pythagoricienne, elle, entend lier géométrie et Nombre. Chez Pythagore en dépit de la «musique des sphères», c'est l'arithmétique qui domine.
Voici quelques exemples :

A. IMAGES POUR CALCULER : Somme des premiers entiers, somme des premiers impairs, somme des cubes… On peut imaginer une démonstration par un calcul mais ici l'image **prouve**, et probablement elle est d'un meilleur secours pour retrouver le résultat et l'établir dans la mémoire.







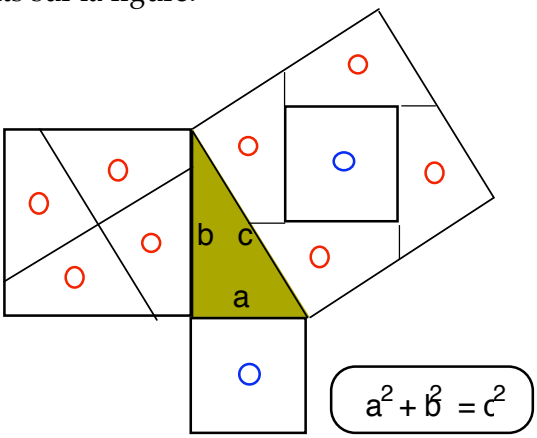
$$(1+2+\ldots+n) \times 2 = n(n+1)$$

$$1+3+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$$

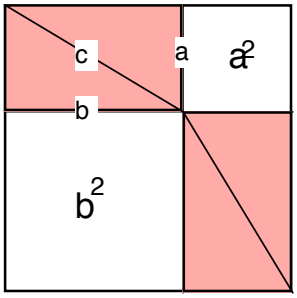
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{2}$$

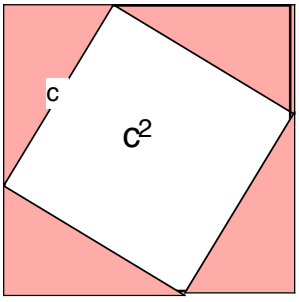
B. IMAGES POUR PROUVER

On a répertorié plus de trois cents démonstrations de ce théorème en plusieurs dizaines de siècles et sur plusieurs continents. Celle de Pythagore, si elle a existé, ne semble pas connue ; celle d'Euclide n'est pas la plus simple mais s'accommoderait bien d'un dessin animé (déformation d'un quadrilatère à aire constante). En voici deux plus récentes, qui fonctionnent comme deux puzzles, et que l'on pourrait donc aborder dès l'école primaire, de façon à donner *l'idée* de la démonstration, dont tous les éléments sont présents sur la figure.



$$a^2 + b^2 = c^2$$





La première est de Périgal (1873) ; elle est très proche de la lettre de l'énoncé (carrés construits sur les côtés) ; en assemblant les pièces codées en rouge et bleu on peut, soit construire deux carrés sur les petits

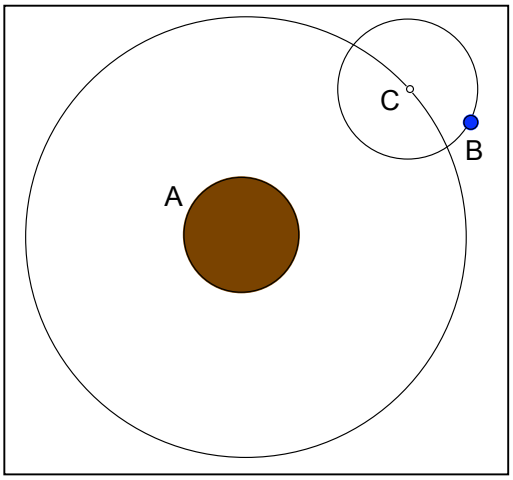
côtés, soit un grand carré sur l'hypoténuse. La seconde, plus connue, est de Simson (1766) : en disposant différemment quatre exemplaires du triangle rectangle, on dégage soit deux carrés soit un seul, dont l'aire est donc égale à la somme des deux autres.

La géométrie d'Euclide a été véhiculée dans le monde entier (notamment par les jésuites) pendant des siècles, non seulement pour les résultats qu'elle démontre, mais aussi en tant que modèle de raisonnement. Mais aucun traité classique ne se dispense de figures, comme support pour l'intuition.
C'est une géométrie axiomatique, mais les axiomes[1] sont donnés pour leur « évidence » et par conséquent ni mis en doute, ni discutés par l'auteur. Clairaut [Eléments de Géométrie, 1741] dans sa préface, entend retourner à l'origine de la géométrie (arpentage) et alléger le poids de certaines justifications, qui peuvent sembler superflues :
« *Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé ; on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des sophistes obstinés qui se faisaient gloire de réfuter les vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face* ».

Cette Géométrie a fonctionné longtemps comme référence, y compris dans les sciences physiques, non seulement pour la sûreté du raisonnement, mais comme représentation de l'espace et modèle de perfection.

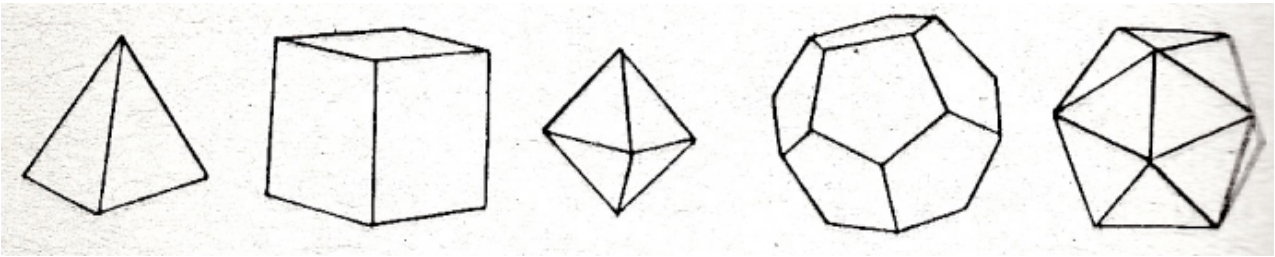
2. Le modèle géométrique en sciences jusqu'au XVII°

Nous prendrons principalement l'exemple de l'Astronomie
Le système aristotélicien du monde, fondé sur des observations innombrables, met en jeu les « épicycles ». La Terre est posée au centre du Monde. La figure de référence est le cercle, considéré comme parfait, mais le mouvement apparent des planètes supérieures (Mars, Jupiter,…) se déroule dans le plan de l'écliptique, et comporte des phases de rétrogradations.
Un seul cercle-orbite ne suffit pas à rendre compte du mouvement d'une planète. On ajoute un cercle auxiliaire centré en un point C autour duquel tourne (uniformément) l'astre B. Si cela ne suffit pas, on ajoute d'autres cercles.



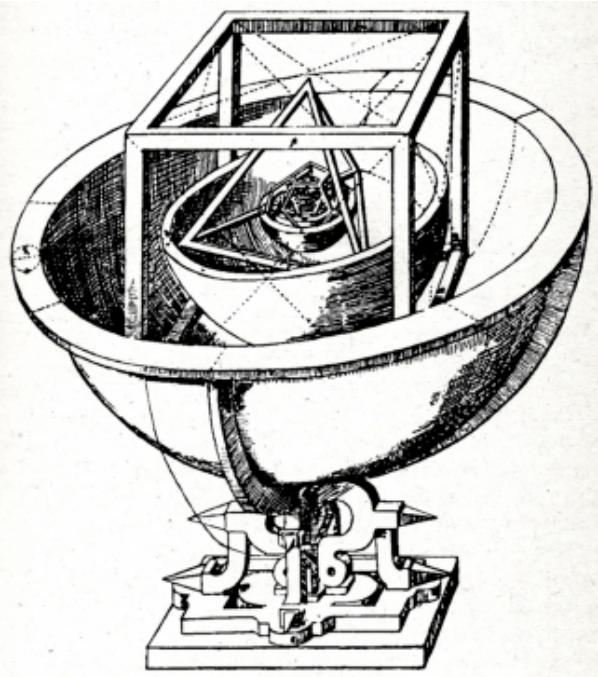
• Copernic combat les modèles géocentriques, Il propose [De Révolutionibus Orbium cœlestium, 1543] un système **héliocentrique**, mais sans toutefois renoncer aux épicycles ; il en rajoute même pour rester compatible avec les observations. Le système en comporte une cinquantaine.

• Képler défend une géométrie « vraie » ; il cherche un modèle géométrique, pour « expliquer » les distances du soleil aux planètes (grâce à l'emboîtement des solides de Platon) pendant 20 ans. [Mystérium cosmographicum, 1596]. Les « solides de Platon », tenus pour parfaits, sont les cinq polyèdres réguliers (autant que de planètes visibles) :

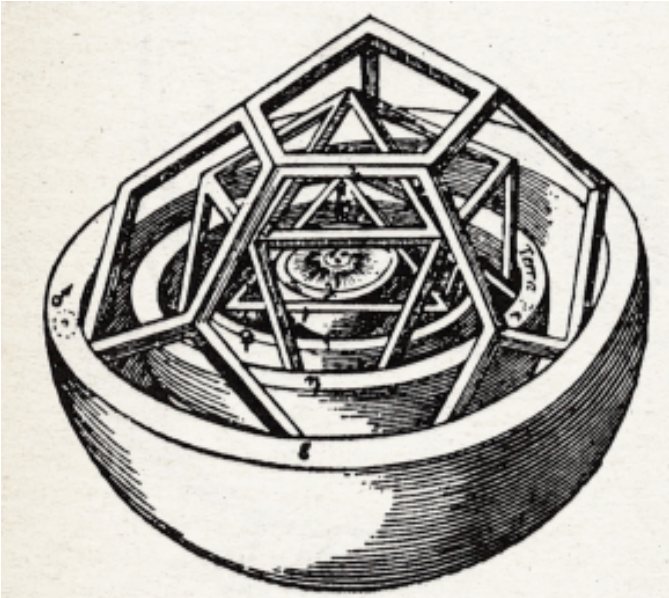


Chacun est inscriptible dans une sphère, et contient une sphère inscrite. En emboîtant les unes dans les autres, Képler a longuement cherché à restituer les distances du Soleil aux planètes visibles.

[1] C'est le terme « postulat » qui est mentionné dans les traités classiques ; mais il est maintenant en relative désuétude.
Le mot « axiome » a pris sa place, mais en retirant toute référence à l'intuition, l'évidence ou la nécessité.



Vue générale de l'Univers.
La sphère extérieure est celle de Saturne.



Détail montrant les sphères de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure avec le Soleil au centre.

Il se résoudra plus tard à passer aux ellipses, grâce aux observations archivées par Tycho Brahé. [Astronomia Nova, 1609]. Mais c'est toujours dans le paradigme euclidien : des ellipses (considérées comme moins parfaites) au lieu des cercles ou des polyèdres réguliers.
[*Voir à ce sujet : A.Koestler, « Les somnambules, Calmann-Lévy, 1960*]

Face à ces modèles géométriques la « loi de Bode » trouvera du crédit plus d'un siècle après Képler. Initiée par Titius, mais reprise et diffusée par Bode, elle s'appuie, non sur des images, mais sur un modèle arithmétique. Il s'agit encore de trouver une « formule mathématique de l'Univers » au moins pour représenter la distance des planètes au Soleil.

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	?	Jupiter	Saturne	?
U.A. / 10	4	7	10	16	28	52	100	196

Ce tableau indique une valeur approchée des distances au Soleil, exprimée en dixièmes d' « unité astronomique » (distance du Soleil à la Terre). La formule de récurrence suivante rend compte de ces valeurs :

$$u_1 = 4 \qquad u_{n+1} = u_n + 3 \times 2^{n-1}$$

Et ce modèle résiste assez bien : aucune planète au 5° emplacement ? On trouvera plus tard l'anneau des « petites planètes », et par exemple Cérès pour l'occuper. Jusqu'à Saturne l'erreur du modèle par rapport aux distances mesurées est ≤ 5%. Lorsque Uranus sera calculée, puis découverte, l'erreur du modèle est < 2%. En revanche le modèle ne convient plus du tout pour Neptune et Pluton (dont l'orbite est beaucoup plus aplatie).

Avec Descartes naît une nouvelle association de la géométrie et du calcul : la géométrie analytique. Mais c'est un développement du même paradigme : on interprète *géométriquement* les équations (droites, plans, courbes…). Le calcul se substitue à la « démonstration géométrique », mais la représentation géométrique n'est ni remise en cause, ni mise de côté.
Un texte de Rousseau indique d'ailleurs combien la substitution d'un calcul à une figuration peut susciter de résistance :
Je passais de là à la géométrie élémentaire ; car je n'ai jamais été plus loin, m'obstinant à vouloir vaincre mon peu de mémoire à force de revenir cent et cent fois sur mes pas et de recommencer incessamment la même marche. Je ne goûtai pas celle d'Euclide, qui cherche plutôt la chaîne des démonstrations que la liaison des idées ;[…] Quand je

fus plus avancé, je pris la Science du calcul du P. Reynaud, puis son Analyse démontrée, que je n'ai fait qu'effleurer. Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais point cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait; et ***il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle****. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes, autrement je n'y comprenais plus rien. [Rousseau, Confessions].*

3 . Evolution moderne de la géométrie

Dès la fin du XVIIIème siècle, la géométrie va « s'algébriser » de plus en plus, et particulièrement avec le calcul différentiel et intégral (Newton et Leibniz). La mécanique (en particulier la mécanique céleste) en témoigne avec Laplace, Lagrange, Leverrier notamment. Mais ceci ne remet pas fondamentalement en cause les « modèles géométriques », bien au contraire.
Au début du XIXème siècle la géométrie classique connaît une superbe apothéose tant spéculative (avec la géométrie projective, Chasles, Poncelet) que pratique (géométrie descriptive, Monge).
Deux nouvelles directions se développent vigoureusement, en relative rupture avec cette géométrie « classique » :
• d'une part l'examen des fondements et la remise en cause des *postulats*, c'est un développement **logique** (Hilbert, Klein mais aussi Russel) : les axiomes sont-ils indépendants ? Pourquoi en choisir un plutôt qu'un autre ? C'est la naissance des géométries non-euclidiennes, de la recherche des fondements, de la logicisation. Les références imagées sont beaucoup moins requises, voire mises en doute.

• d'autre part, à la suite de Descartes, Newton, Leibniz… la géométrie s'appuie sur l'analyse. C'est le début d'une géométrie *différentielle*, et la naissance de la topologie, des *espaces vectoriels topologiques*, encore en développement aujourd'hui. Mais la référence géométrique n'est pas absente, y compris dans le vocabulaire et ses suggestions imagées. Qu'importe le nombre de dimensions, on parle encore de **vecteurs**, de **plan** (ou d'hyperplan) etc. Même si le système est formalisé, la référence géométrique « classique » n'est pas absente. C'est d'ailleurs l'ignorance de cette référence implicite qui a conduit dans les années 70 à une dérive pédagogique désastreuse (« math moderne ») au collège et au lycée.
Le texte de Poincaré « Des fondements de la géométrie » [voir plus loin] introduit à ce sujet des nuances importantes.

Un autre élément important qui mérite une petite station concerne l'intervention du **temps**.
La géométrie classique ne lui fait pas grande place, mais ne l'exclut pas formellement. Ainsi l'opération de comparaison consiste à *superposer*, c'est-à-dire à amener par la pensée une figure sur une autre. Il ne s'agit pas vraiment d'un mouvement (au sens cinématique), mais d'un déplacement virtuel.
C'est un peu moins clair quand on parle de **rotation** ou de **translation**. Il semble y avoir un état initial et un état final ; mais on reste dans le plan. C'est encore moins clair quand il s'agit de la symétrie : si on la représente comme un *retournement*, on sort du plan, et l'on a besoin d'une troisième dimension ! Mais alors qu'en est-il d'une symétrie par rapport à un plan ? D'où la question de savoir (Kant, Leibniz) si un objet est identique ou non à son *symétrique* (comme la main droite et la main gauche, par exemple). C'est ici affaire de convention.
Une solution moderne et radicale consiste à conserver les métaphores des « transformations », mais en excluant le temps : on parle de « correspondance » entre un objet et son image, etc. C'est le vocabulaire enseigné dans la seconde moitié du XXème siècle.
Une solution alternative consiste à réintégrer explicitement le temps et le mouvement. C'est la proposition pédagogique de Méray (*Nouveaux éléments de géométrie*, Dijon, 1874) qui a connu une certaine notoriété au début du XXème. Elle consiste, d'une part à intégrer le temps, mais aussi développer conjointement géométrie plane et géométrie de l'espace à trois dimensions. On ne développe pas davantage ce point aujourd'hui.
Cette question du temps retentit surtout en Sciences à la même époque, à cause des questions de simultanéité et de l'invariance observée de la vitesse de la lumière (Michelson), qui n'est ainsi plus soumise à la loi de composition des vitesses. Le modèle galiléen est en difficulté, la « relativité restreinte » y répond. Mais il ne s'agit (pas encore) d'une mise en cause de l'espace, ou de la référence géométrique. Le calcul des vitesses et des masses en est perturbé, mais pas vraiment l'intuition géométrique.

4. Avatars du modèle géométrique en sciences

En Sciences, la rupture majeure vient de la physique, avec le paradigme corpusculaire/ondulatoire.
Une particule a les propriétés d'un objet, mais sa localisation est problématique, elle devient probabiliste ; elle a aussi les propriétés d'une onde, laquelle emplit tout l'espace. Il ne s'agit pas là d'une alternative, mais d'une complémentarité. J-M. Lévy-Leblond (in *L'espace et le temps aujourd'hui*, Seuil, 1983, Chap 6) suggère que c'est la dualité d'un espace contenant et des objets contenus qui est sans doute à repenser. La physique corpusculaire fait disparaître le paradigme géométrique. On manipule des équations ou des modèles formels.
Cependant en cosmologie, la relativité générale n'évacue pas aussi radicalement les modèles géométriques. En introduisant une « courbure » liée à la masse (Einstein), ou une « expansion de l'espace » (Hubble), on quitte assurément l'espace euclidien, mais pas tout à fait la géométrie.

5. Un texte de Henri Poincaré proposé à la discussion : « *Des fondements de la Géométrie* » paru (en anglais) dans la Revue *The Monist*, 1898 et annexé au présent article

Les passages entre guillemets sont des citations de H.Poincaré

L'objet de l'étude n'est pas historique mais examine la question « **comment la géométrie est-elle possible ?** ». Il s'appuie d'une part sur l'affirmation kantienne « *l'espace est une forme a priori de la sensibilité* » et d'autre part sur le choix des axiomes d'Euclide.

Les sensations ne peuvent donner la notion d'espace, parce que les sensations visuelles n'indiquent nullement ni l'orientation ni les distances. Deux types de coordinations interviennent :
• d'une part celles des sensations entre elles (les deux yeux, les deux oreilles, les mains…) ; qui rappelle la « *coordination des espaces perçus* » qui selon Piaget contribue à la construction de l'espace,
• d'autre part la coordination entre sensations externes et sensations musculaires internes. Les déplacements (souvenir d'un programme musculaire) coordonnés aux changements perceptifs suscitent des représentations, qui sont celles d'un espace sensible.
Mais il y a loin de l'**espace sensible** à l'**espace géométrique**, qui consiste à mettre en relation les représentations internes, les comparer, et raisonner sur elles. Cet espace-ci est donc une forme a priori de **l'entendement**.
Elle s'agit de la capacité à mettre en relation, comparer, associer des sensations externes et internes, présentes et passées. C'est à partir d'une immensité de messages neurologiques divers que s'élaborent les notions de direction, de dimension, de distance. Le sentiment de direction n'est pas dans la sensation. Le regroupement de sensations, l'association avec des compensations musculaires créent la notion de direction.
L'espace sensible ne saurait être ni infini, ni homogène, ni isotrope. Ceci appartient à l'espace géométrique. « *Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations* » « *L'espace géométrique ne peut donc pas servir de catégorie pour nos représentations.* »

Déplacement : il induit un changement de sensation ; qu'est-ce qui fait dire qu'il s'agit du même « objet » selon un autre point de vue ? C'est la capacité de rétablir la même sensation en activant le corps d'une certaine façon. [cf l'illusion de variation du diamètre apparent de la Lune selon sa hauteur dans le ciel]. La compensation par le mouvement interne compense la variation de sensation ; ce n'est pas la même chose si l'objet se transforme lui-même : il y a changement d'état. Cette classification est une activité de l'esprit rendue possible par l'expérience, mais qui ne s'y réduit pas.
Ces mouvements sont susceptibles d'être composés. Ces compositions ont une structure de groupe. A l'intérieur duquel on peut distinguer des sous-groupes de rotations, de translations etc. La structure de groupe préexiste-t-elle dans l'esprit ?
Ceci ressemble à « *l'heureuse imperfection des sens* » dont parle Gonseth, faute de laquelle nous n'aurions aucun moyen de construire des schémas, comme la représentation mentale de la droite.
[…]
Le raisonnement d'Euclide. Les Eléments débutent par des axiomes explicites. Mais des hypothèses implicites constituent des axiomes déguisés. Ainsi la « superposition » comme critère d'égalité des triangles. La notion de déplacement préexiste, donc implicitement la structure de groupe. La rotation autour d'un axe, le glissement le long d'une droite sont les instruments implicites en arrière-plan des axiomes explicites.

Qu'est-ce qui garantit que la géométrie (euclidienne ou non) n'est pas contradictoire ? La transposition à la géométrie analytique offre cette garantie, puisque l'Analyse n'est pas contradictoire.

« Pourquoi la géométrie ne peut pas être étudiée sans figures ? Quand on commence à étudier la géométrie, on dispose d'expériences fondamentales antérieures qui ont permis à la notion d'espace de prendre naissance. mais ce ne sont pas les figures que nous étudions, mais quelque chose de plus élevé et de plus subtil.
La géométrie n'est pas une science expérimentale ; l'expérience n'est qu'une occasion (nécessaire) de réfléchir à des idées géométriques qui préexistent en nous. ***L'espace n'est pas une forme de notre sensibilité ; c'est un instrument qui nous sert, non à nous représenter les choses, mais à raisonner sur les choses ».***

François Boule* (francois.boule@neuf.fr)*, paris, 24 mai 2014

Bibliographie :

N. Copernic : *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, Nuremberg, 1543

J. Képler : *Mystérium Cosmographicum*, 1596 Astronomia Nova, 1609

A-C. Clairaut : *Eléments de Géométrie,* 1741 [rééd J.Gabay, 2006]

Ch. Méray : *Nouveaux éléments de géométrie*, 1974 [rééd 1903]

A. Koestler : *Les somnambules*, Calmann-Levy, 1960 [LdP 2200]

F. Gonseth : *La mathématique et la réalité,* 1936 [rééd Blanchard, 1974]

pour aller plus loin :
[coll] : *L'espace et le temps aujourd'hui*,1983 Points-Sciences S36
en particulier J-M Lévy-Leblond chap 4 et 6, sur la relativité et la physique corpusculaire
et J. Alegria chap 12, sur la construction de l'espace
L. Nottale : *La relativité dans tous ses états,* Hachette, coll. Pluriel, 1998
…et même très loin :
S. Hawking & R.Penrose : *La nature de l'espace et du temps,* Gallimard 1997, folio-essais 430

pour le plaisir de la géométrie :
J-L. Brahem : Histoires de géomètres et de géométrie, Le Pommier, 2011

◆◆◆