Séance du 20 mars 1904

Exposé de M. Couturat

KANT ET LA MATHÉMATIQUE MODERNE [1]

On sait que la question capitale de la *Critique de la Raison pure* est celle-ci : Comment des jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibles ? Que de tels jugements existent, cela ne paraît pas douteux à Kant : les propositions métaphysiques, d'une part, et les propositions mathématiques, d'autre part, sont pour lui des jugements synthétiques *a priori*. Mais il fait une grande différence entre ces deux espèces de propositions au point de vue de leur valeur. Dans la Méthodologie transcendantale, en effet, il distingue nettement la métaphysique de la mathématique : la métaphysique est la connaissance rationnelle *par concepts*, tandis que la mathématique est la connaissance rationnelle *par construction de concepts* : elle construit ses concepts, c'est-à-dire qu'elle les représente dans une intuition *a priori* ; or nous n'avons pas d'autre intuition que l'intuition sensible, et pas d'autre intuition *a priori* que celle de l'espace et du temps. L'espace et le temps sont «les grandeurs originaires uniques», et c'est pourquoi la mathématique ne peut s'appliquer qu'à la grandeur, et au nombre, schème de la grandeur. Les jugements synthétiques *a priori* de la mathématique sont donc possibles et légitimes, parce qu'ils reposent sur des synthèses effectuées dans l'intuition *a priori*. Au contraire, la métaphysique, étant une connaissance *par concepts*, ne peut, en spéculant sur des concepts abstraits, qu'en tirer ce qui y est logiquement contenu, et par suite ne peut formuler valablement que des jugements analytiques. Les jugements synthétiques *a priori* de la métaphysique sont donc possibles, mais illégitimes.

Ainsi Kant sépare et oppose radicalement la métaphysique et la mathématique au point de vue de la méthode. Il va jusqu'à soutenir que seule la mathématique peut avoir des axiomes et des démonstrations. Elle seule a des axiomes, c'est-à-dire des principes synthétiques *a priori*, parce que de tels principes ne peuvent être fondés que sur les intuitions pures de l'espace et du temps. Elle seule a des démonstrations, parce que seule la construction intuitive des concepts peut fournir l'évidence et garantir la certitude apodictique des déductions. Cela est manifeste pour la Géométrie, qui ne raisonne

---

[1]. Cet exposé n'est qu'un extrait d'un article sur *La philosophie des mathématiques de Kant*, qui paraîtra dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, n° de mai 1904 (spécialement consacré à Kant).

que sur des figures particulières et au moyen de constructions spatiales ; cela est également vrai pour l'Arithmétique : car une vérité arithmétique comme 7 + 5 = 12 ne peut se démontrer qu'au moyen de l'intuition, en unissant dans l'intuition (empirique ou *a priori*) 7 objets et 5 objets ; cela est vrai même de l'Algèbre, car elle se sert de signes intuitifs dont la manipulation mécanique est, selon Kant, une construction «symbolique» analogue à la construction géométrique. Il en conclut que cette méthode est exclusivement propre à la mathématique, et que la métaphysique ne saurait l'employer ni prétendre à une certitude apodictique.

Pourquoi Kant établit-il ainsi entre la métaphysique et la mathématique une opposition aussi tranchée, et insiste-t-il tant sur leur hétérogénéité absolue ? Sans doute, c'est avant tout parce qu'il est préoccupé d'établir la valeur objective de la science, et de ruiner au contraire celle de la métaphysique (comme connaissance spéculative et transcendante) ; mais c'est aussi, au point de vue historique, parce qu'il veut réagir contre la philosophie de Leibniz et de Wolff. Pour Leibniz, toute vérité était analytique, et, en particulier, les vérités métaphysiques et mathématiques étaient analytiques et logiquement démontrables ; Leibniz prétendait traiter la métaphysique par la méthode mathématique, par axiomes, définitions et démonstrations ; et encore voulait-il démontrer tous les axiomes, c'est-à-dire les réduire à des propositions analytiques (identiques). C'est contre cette conception rationaliste que Kant s'élève avec tant de force dans la Méthodologie. En général, on ne peut pas comprendre pleinement la *Critique de la Raison pure*, si l'on n'y voit pas cette opposition systématique au leibnizianisme, manifeste dans l'*Esthétique* et dans l'*Amphibologie*, plus ou moins latente dans les autres chapitres.

Est-il vrai que les jugements mathématiques soient synthétiques, et surtout qu'ils soient nécessairement et exclusivement fondés sur l'intuition ? Telle est la question que nous voulons examiner brièvement, non en discutant théoriquement et en détail la thèse de Kant, mais simplement en la confrontant avec la mathématique moderne. L'évolution des sciences mathématiques depuis un siècle a-t-elle confirmé ou infirmé la théorie kantienne ?

À cette question, voici la réponse qu'a faite M. Vaihinger. À propos de la phrase où Kant affirme que les mathématiques ne peuvent s'occuper d'un objet que dans la mesure où il se laisse représenter dans l'intuition (B, 8), le savant commentateur de Kant déclare : «Cela n'est plus vrai de la mathématique moderne (*Dies gilt für die moderne Mathematik nicht mehr*)»[2]. Nous prenons cette réponse à notre

---

[2]. *Commentar zur Kant's Kritik der reinen Vernunft*, t. I, p.243 (1881).

compte, en ajoutant qu'elle est encore bien plus justifiée aujourd'hui qu'en 1881, car la Logique mathématique, qui n'existait presque pas alors, a reçu depuis des développements qui n'ont fait que confirmer la susdite réponse.

Examinons d'abord les démonstrations mathématiques, et cherchons quelle y est la part de l'intuition. S'il y a un domaine où l'intuition semble régner, c'est bien la Géométrie classique, dite synthétique, traitée suivant la méthode d'Euclide. Et pourtant, tous les géomètres savent combien il faut se défier de l'intuition en Géométrie : il faut bien se garder de faire appel à la figure : on ne peut invoquer une disposition de la figure ou une construction qu'à la condition d'avoir démontré que cette construction est possible et que cette disposition est une conséquence nécessaire des hypothèses faites : c'est-à-dire que la démonstration repose, en apparence seulement sur la figure, mais en réalité sur les définitions et sur les axiomes. Kant prétend que le raisonnement géométrique ne considère le général que dans le particulier. Mais alors, comment peut-on affirmer la valeur universelle d'aucun théorème ? Il faudrait dire chaque fois, comme l'a suggéré un empiriste : «Nous venons de démontrer ce théorème pour un cas particulier, par exemple pour tel triangle tracé tel jour sur tel tableau : mais la même démonstration pourrait se répéter sur tous les autres triangles , et par conséquent le théorème est général». Mais pourquoi «la même» démonstration peut-elle se répéter sur tous les autres triangles ? C'est parce qu'elle porte, non sur les propriétés particulières du triangle considéré, mais sur les propriétés générales du triangle, c'est-à-dire en somme sur la définition qui constitue l'essence intelligible de cette figure. On ne raisonne donc pas, en réalité, sur tel triangle particulier donné dans l'intuition (empirique ou *a priori*), mais sur le triangle en général, quelles que soient sa forme et ses dimensions.

Si la Géométrie synthétique ne repose pas sur l'intuition, cela sera vrai, à plus forte raison, des autres espèces de Géométrie : la Géométrie analytique, qui selon Descartes était destinée à soulager l'imagination et à dispenser de la considération des figures, ne se sert de l'intuition que pour l'établissement de ses équations, et procède dès lors d'une manière analytique, par le calcul algébrique. Il en est de même des calculs géométriques modernes (calcul des quaternions de Hamilton, calcul de l'extension de Grassmann), qui traitent directement les entités géométriques dans toute leur généralité, par des procédés analytiques, sans recourir à l'intuition ni à des constructions auxiliaires (axes de coordonnées) comme la Géométrie analytique. Il en est de même enfin de la Géométrie projective, fondée par Staudt, qui, tout en employant la méthode synthétique, n'a aucun

recours aux figures (on n'en trouve pas une seule dans toute la *Geometrie der Lage* de Staudt) ; et en effet, les spéculations de cette Géométrie dépassent l'intuition par une double infinité : l'infinité des figures élémentaires (droites, plans), qui sont conçues, non plus limitées et morcelées comme chez Euclide, mais dans leur totalité infinie ; et l'infinité numérique des ensembles qu'elles composent (faisceaux de droites et de plans). Ainsi la Géométrie moderne s'affranchit de plus en plus, dans ses méthodes de démonstration, du secours de l'intuition.

La thèse de Kant est encore bien moins justifiée pour l'Algèbre : il y a une exagération manifeste à soutenir que l'Algèbre est tributaire de l'intuition, parce qu'elle se sert de symboles visibles dans ses calculs, et à assimiler cette «construction symbolique» aux «constructions géométriques» qui, elles, représentent du moins les objets du raisonnement. Ou plutôt, c'est confondre le signe avec l'idée signifiée. Une formule algébrique écrite au tableau n'est que l'expression d'une idée ou d'une combinaison des idées, et un calcul n'est que l'expression d'un raisonnement effectué sur ces idées. Dira-t-on qu'on opère sur les symboles algébriques suivant des règles formelles et pour ainsi dire mécaniques, sans avoir à s'inquiéter de leur sens ? Ce serait oublier que ces règles formelles ont dû être auparavant justifiées une fois pour toutes, et qu'on n'a pu les démontrer qu'en invoquant le sens des symboles et des opérations, dont on fait ensuite abstraction. D'ailleurs, on a aujourd'hui appliqué à la Logique elle-même cette méthode algébrique, que Kant croyait réservée aux sciences du nombre et de la grandeur, et l'on remplace là aussi le raisonnement par le calcul. Dira-t-on pour cela que le syllogisme est fondé sur l'intuition, parce qu'on le représente par des signes analogues à ceux de l'Algèbre ? L'utilité du symbolisme algébrique, pour les déductions les plus abstraites, a été proclamée par Descartes et par Leibniz, qui étaient pourtant des rationalistes. Celui-ci surtout concevait une Caractéristique (c'est-à-dire une Algèbre) universelle qui fût un instrument de démonstration applicable à tous les ordres de connaissance ; et il ne pensait nullement asservir par là la Logique à l'intuition sensible. S'il est vrai qu'on ne pense pas sans images, il n'est pas moins vrai que ce ne sont pas les images qui font la valeur logique de la pensée.

Enfin, il n'est pas exact de dire que l'Arithmétique ne peut se passer de l'intuition pour ses démonstrations. Quoi qu'en dise Kant, on peut démontrer «7 + 5 = 12» autrement qu'en comptant sur ses doigts, ou sur un tableau à boules : cette vérité arithmétique se démontre logiquement au moyen des définitions de 7, de 5, de 12 et du signe = , c'est-à-dire de l'addition. Quant à la copule =, c'est, comme M. Frege

l'a excellemment montré, le signe même de l'égalité logique ou de l'identité : elle signifie que les deux membres, bien qu'ayant des sens différents, représentent la même idée, le même objet ; dans l'exemple présent, 7 + 5 et 12 sont le même nombre écrit de deux manières différentes. Sans doute, il ne suffit pas d'écrire ou de prononcer machinalement «7 + 5» pour avoir l'idée de 12, et c'est en ce sens que 12 ajoute quelque chose à «7 + 5» et n'y est pas contenu. Mais il est impossible de penser réellement «7 + 5», de concevoir le nombre unique que cette somme constitue par définition, sans penser *ipso facto* le nombre 12. Ce jugement est donc analytique, et même identique.

En général, du reste, si l'on considère sans parti pris l'évolution de la mathématique depuis trente ou quarante ans, on est obligé de constater que tout le grand travail de refonte et d'épuration logique qu'elle a subi, notamment de la part de Weierstrass et de son école, a tendu sans cesse à affranchir le démonstrations mathématiques de l'intuition, et y a finalement réussi. La généralisation du nombre a été dégagée de toutes les considérations géométriques par lesquelles on essayait jadis de justifier les nombres fractionnaires et négatifs, irrationnels et imaginaires : on donne désormais de ces nombres des définitions purement analytiques, qui n'impliquent que l'idée de nombre entier. Le Calcul infinitésimal a été purgé de tout mystère, de tout postulat intuitif : il repose maintenant tout entier sur la notion bien définie de limite. On a expulsé de la théorie des fonctions tous les préjugés d'origine intuitive qui en altéraient la rigueur et la pureté ; on a défini analytiquement la continuité d'une fonction, et l'on a découvert qu'une fonction continue peut n'avoir pas de dérivée (qu'une courbe continue peut n'avoir pas de tangente), ce qui est le plus beau démenti à l'intuition. Enfin la notion même du continu, que l'on considérait comme intuitive et indéfinissable, et qui paraissait caractéristique des grandeurs géométriques, a pu être définie analytiquement par MM. Dedekind et Georg Cantor ; elle a même été finalement dépouillée par celui-ci de toute notion de grandeur, et constituée avec la seule notion d'ordre. Ainsi la mathématique pure est devenue une construction purement logique, elle repose tout entière sur quelques notions et quelques principes, d'où toutes les propositions se déduisent analytiquement.

Il nous reste à examiner les principes de la Mathématique, pour savoir s'ils reposent sur l'intuition. Car, lors même que nous aurions

gain de cause pour les démonstrations, la théorie kantienne subsisterait, quoique modifiée. Comme Kant l'a fait observer avec raison, un jugement peut se déduire *analytiquement* d'un principe *synthétique* : il n'en résulte pas qu'il soit analytique, au contraire, il participe au caractère synthétique du principe. Un Kantien pourrait donc dire : «Soit, il est établi que toutes les démonstrations mathématiques sont analytiques ; mais il suffit que les démonstrations partent de quelques principes synthétiques pour que toutes les propositions qu'on en déduit soient synthétiques elles aussi.» Par exemple, il est reconnu aujourd'hui que toute l'Analyse repose sur l'unique notion de nombre entier, mais si cette notion provient de l'intuition, l'Analyse aura beau être logiquement construire sur elle, elle n'en sera pas moins synthétique.

Ici, il nous faut faire appel, non plus à la Mathématique, mais à la Logique algorithmique, qui doit d'ailleurs tous ses progrès à des mathématiciens, depuis George Boole jusqu'à M. Peano. Tandis que les mathématiciens-logiciens remontaient aux principes de leur science pour les épurer et les approfondir, les logiciens-mathématiciens développaient la Logique de manière à étendre son domaine d'application, et à y comprendre tous les modes du raisonnement déductif. Ces deux séries de travaux, marchant à la rencontre l'une de l'autre, ont fini par se rejoindre, et ont réalisé la soudure et même la fusion de la Logique et de la Mathématique. Cette idée de nombre à laquelle toute l'Analyse est suspendue, et que les mathématiciens considéraient comme irréductible, les logiciens modernes sont parvenus à la définir, en partant des notions premières de la Logique formelle, et indépendamment de toute intuition.

Sans entrer dans le détail technique de cette définition[3], on peut montrer d'une manière négative que la conception kantienne du nombre n'est plus admissible. Kant soutient que le nombre, en tant que somme, implique essentiellement le temps, et est constitué par l'addition *successive* de l'unité à elle-même. Or c'est là confondre l'idée de nombre avec le dénombrement, qui suppose cette idée, bien loin de pouvoir la former primitivement. C'est de plus faire intervenir dans la notion du nombre des conditions psychologiques et empiriques qui y sont logiquement étrangères. Si le nombre implique le temps, c'est comme toutes les opérations intellectuelles, même les plus purement logiques. D'ailleurs, l'idée de nombre cardinal n'implique aucune succession, ni même aucun ordre entre les unités constituantes. Dira-t-on qu'à défaut de l'intuition du temps, c'est celle

---

[3]. Voir notre 2e article sur *Les Principes des mathématiques* (l'idée de nombre), ap. *Revue de Métaphysique et de Morale*, mars 1904.

de l'espace qui sert de base au nombre ? Ce n'est pas plus plausible : on peut dénombrer des objets qui sont aussi bien en dehors de l'espace qu'en dehors du temps (des propositions, par exemple). On n'a donc besoin d'aucune intuition sensible pour concevoir le nombre, non plus que pour établir ses propriétés fondamentales, comme la loi communautaire de la multiplication, que l'on «démontre» pourtant dans les écoles par une figure géométrique. Ainsi l'Arithmétique et toute l'Analyse reposent, non sur une intuition, fût-elle *a priori* comme celle de l'espace et du temps, mais sur des concepts logiques, et sont entièrement analytiques.

Reste la Géométrie, pour laquelle on ne peut pas soutenir la même thèse, car, s'il n'y a qu'une notion de nombre, il y a plusieurs espaces possibles. Chose curieuse, la Géométrie moderne a réalisé l'idée que Kant exprimait dans son premier ouvrage, à l'âge de 23 ans, quand il était entièrement sous l'influence de Leibniz : «Une science de toutes les espèces possibles d'espace serait sans doute la Géométrie la plus haute qu'un entendement fini pût entreprendre»[4]. En ce sens, la Géométrie s'est affranchie de la tutelle de l'intuition, puisqu'elle a fait la théorie d'espaces tout différents de celui que nous connaissons. Chacune des Géométries ainsi élaborée est un système *hypothético-déductif*, suivant le mot de M. Mario Pieri, qui a construit plusieurs de ces systèmes : chacun d'eux est un ensemble de propositions (de propriétés de l'espace) qui se déduisent logiquement d'un certain nombre d'hypothèses ou postulats (une vingtaine). Si un espace vérifie ces postulats, il vérifiera nécessairement toutes les propositions qui en dérivent. On a ainsi le choix entre divers systèmes également analytiques, dont chacun est entièrement déterminé et caractérisé par l'ensemble de ses postulats initiaux. Mais à qui appartient-il de choisir entre tous ces systèmes ? À l'expérience, disent la plupart des mathématiciens (qui d'ailleurs ne distinguent pas l'expérience de l'intuition *a priori*). D'autres soutiennent au contraire que l'expérience ne peut décider, parce que *notre* expérience pourrait à la rigueur se couler indifféremment dans chacun des moules que nous offrent ces divers espaces ou ces diverses Géométries ; et ils invoquent, pour expliquer le choix que nous faisons pratiquement et unanimement du système euclidien, des raisons de commodité, de simplicité, bref, des raisons d'ordre quasi esthétique qui pourraient bien être, en dernière analyse, des motifs d'ordre rationnel, des jugements synthétiques *a priori*. Seulement ces jugements synthétiques ne seraient plus fondés sur l'intuition sensible, mais sur la raison, c'est-à-dire sur une synthèse intellectuelle. Quoi qu'il en soit, il reste vrai que, de tous les espaces

---

[4]. *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, § 10 (1747).

logiquement possibles, il n'y en a qu'un qui soit pour nous objet d'intuition (empirique ou *a priori*), et cela suffit pour qu'on puisse encore soutenir la théorie kantienne au sujet de la Géométrie. Il est assez piquant de constater que les Géométries non euclidiennes, qui passent, aux yeux de beaucoup de mathématiciens et même de philosophes, pour avoir ruiné la théorie kantienne, sont compatibles avec elle et peuvent même lui servir de confirmation. Ce n'est pas la Géométrie non euclidienne, mais bien la reconstruction logique de l'Analyse qui a porté le plus rude coup à la théorie de la connaissance de Kant[5].

Il semble donc que la Mathématique et la Logique modernes donnent raison à Leibniz contre Kant : et en effet, si Kant séparait et opposait entre elles la Logique et la mathématique, c'est qu'il avait une idée trop étroite de l'une et de l'autre. Il restreignait la Logique à l'étude des jugements de prédication (sujet-prédicat) ; il croyait que la Logique n'avait pas fait un pas depuis Aristote et n'en ferait plus aucun : assertion à laquelle la Logique moderne a donné le plus éclatant démenti. D'autre part, il concevait les mathématiques comme les sciences du nombre et de la grandeur, et croyait que la méthode mathématique n'est applicable qu'à des objets spéciaux. Or la Mathématique moderne a rompu le cadre où la tradition l'enfermait, et vérifié cette parole de Boole : «Il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper exclusivement des idées de nombre et de grandeur[6].» Boole, en inventant le Calcul logique, Grassmann, en inventant le Calcul géométrique, n'ont fait que ressusciter des idées de Leibniz et réaliser en plein XIXe siècle la Caractéristique universelle. En ce sens, on peut dire que Leibniz est plus moderne que Kant. La fusion de la Logique et des Mathématiques, qu'il avait entrevue, est aujourd'hui réalisée.

Est-ce à dire que nous voulions restaurer le leibnizianisme aux dépens du kantisme, et opposer au «retour à Kant» un retour à Leibniz ? Nullement, car si Leibniz a été par certains côtés un précurseur et un prophète, il est resté par d'autres côtés prisonnier de son temps et de la tradition. Lui aussi a été esclave et victime (quoique moins que Kant) de la conception étroite et stérile de la Logique classique ; et, d'autre part, il considérait la Mathématique comme «la Logique de l'imagination», par où il se rapproche beaucoup de la thèse kantienne des intuitions *a priori*. Ce n'est donc ni de Leibniz ni de Kant que notre philosophie doit s'inspirer, mais bien de la science moderne,

---

[5]. Russell, *The Principles of Mathematics*, § 149, p. 158.
[6]. *Laws of Thought*, p. 12 (1854).

dont le développement a démenti bien des doctrines et trompé bien des prévisions.

En cela, d'ailleurs, nous ne ferons qu'imiter Kant ; on a montré tout ce que sa métaphysique devait aux théories cosmologiques de Newton : or, de même que la science a dépassé Newton, la philosophie peut et doit dépasser Kant. Nous ne parlons ici, bien entendu, que de sa théorie de la connaissance, et faisons toutes réserves sur les autres parties de la philosophie kantienne. Mais il est évident que la philosophie des sciences, tout au moins, profite nécessairement des progrès réalisés par les sciences elles-mêmes, d'autant plus que, à mesure que les sciences se développent dans le sens des conséquences et des applications, elles se perfectionnent aussi au point de vue logique en éclaircissant et en approfondissant leurs principes. Il est rassurant, pour l'avenir de la philosophie, de constater que ses progrès sont, dans une certaine mesure, liés aux progrès continuels de la science elle-même, et qu'elle peut revendiquer la devise modeste et fière qu'on applique trop exclusivement à la science : *Multi pertransibunt, et augebitur … philosophia*.

NB. Dans le § commençant par "Examinons d'abord, p. 127 de l'original, il y a un usage des ":" qui est un peu déconcertant. On attendrait plutôt des ";".