Renforcement en Science

Chapitre 3 : Etude de circuits électriques

Laurent Millot

contacts@autopscience.com

8 septembre 2021

objectifs de ce chapitre :

- introduire la notation ou représentation complexe en électricité
- définir les lois des composants passifs
- introduire des outils et des résultats importants pour l'étude des circuits électriques
- appliquer tous ces outils à l'étude de circuits électriques emblématiques correspondant aux filtres analogiques d'ordre 1 et 2

Avec ce chapitre, on passe en revue l'utilisation des nombres complexes et de la dérivation pour étudier les filtres analogiques.

L'étude des filtres analogiques sera reprise plus tard dans le cadre du cours de traitement du signal pour étendre les principes exposés dans ce chapitre à des signaux quelconques.

1. Représentation ou notation complexe

1.1 Hypothèse

Dans ce chapitre, on considère le cas de signaux électriques, tensions et intensités, constitués d'une unique sinusoïde donc susceptibles d'obéir au modèle mathématique
$A\sin(\omega t + \varphi)$ avec :

- A : amplitude
- ω : pulsation définie par $\omega = 2\pi f$ où f correspond à la fréquence
- φ : une éventuelle phase à l'origine

Un exemple emblématique de signal de ce type est la tension alternative de fréquence 50 ou 60 Hz suivant les pays qui est disponible pour les installations domestiques notamment.

1. Représentation ou notation complexe

1.2. Représentation ou notation complexe

On a vu que l'utilisation des exponentielles complexes facilite grandement le calcul des dérivées des signaux sinusoïdaux.

Pour profiter de cette simplicité, on peut introduire une notation reposant sur l'utilisation des exponentielles complexes pour modéliser les signaux purement sinusoïdaux.

Cette modélisation s'appelle la représentation ou notation complexe.

Si on considère une tension $u(t)$ sinusoïdale, on peut alors introduire son pendant en représentation ou notation complexe $\underline{u}(t)$ définie par $\underline{u}(t) = \underline{U}_0.e^{\mathrm{j}\omega t}$,

avec $\underline{U}_0$: nombre complexe non nul rassemblant l'amplitude réelle et la phase à l'origine éventuelle.

1. Représentation ou notation complexe

On peut donc introduire $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ pour décrire respectivement les tensions sinusoïdales $u(t)$ et $i(t)$.

Et, partant de $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$, on accède à $u(t)$ et $i(t)$ en prenant la partie réelle de leur représentation complexe :

- $u(t) = \Re\big(\underline{u}(t)\big)$;
- $i(t) = \Re\big(\underline{i}(t)\big)$.

L'utilisation de la représentation complexe simplifie la manipulation des dérivées puisque seule la dérivée de $e^{\mathrm{j}\omega t}$, égale à $\mathrm{j}\omega.e^{\mathrm{j}\omega t}$ intervient :

- $\dfrac{d\underline{u}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\underline{U}_0.e^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{j}\omega.\underline{U}_0.e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega.\underline{u}(t)$;
- $\dfrac{d\underline{i}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[\underline{I}_0.e^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \mathrm{j}\omega.\underline{I}_0.e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega.\underline{i}(t)$.

1. Représentation ou notation complexe

1.3. Impédance et admittance complexes

On définit l'impédance complexe, notée $\underline{Z}(\omega)$, comme le rapport d'une tension et d'une intensité :

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}.$$

On définit l'admittance complexe, notée $\underline{Y}(\omega)$, comme l'inverse d'une impédance complexe donc comme le rapport d'une intensité et d'une tension :

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)}.$$

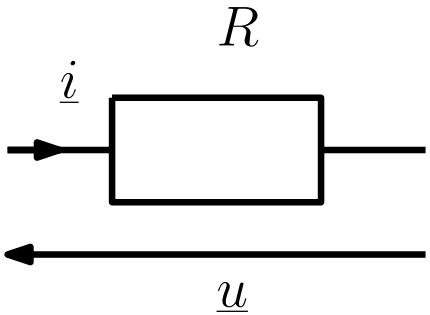
Les impédances et admittances seront très souvent utilisées comme modélisation fréquentielle de composants électriques comme nous le verrons dans la suite.

2. Lois essentielles

2.1. Lois des composants passifs

- **conducteur ohmique :** Le comportement d'un conducteur ohmique (ou résistance) de résistance R est décrit par la loi temporelle d'Ohm :

$u(t) = R.i(t).$



En utilisant la représentation complexe, cette loi devient :

$\underline{u}(t) = R.\underline{i}(t).$

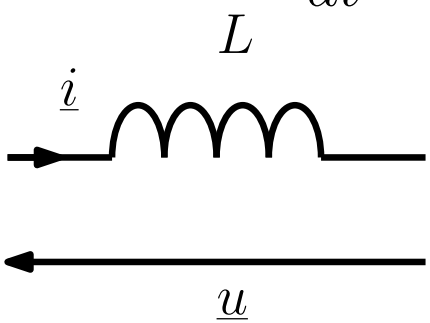
On peut donc introduire l'impédance électrique associée à un conducteur ohmique de résistance R et définie par :

$\underline{Z}_R(\omega) = R.$

2. Lois essentielles

- **inductance :** Le comportement d'un inducteur (ou bobine) d'inductance L est décrit par la loi temporelle de Lentz :

$$u(t) = L.\frac{di(t)}{dt}.$$



En utilisant la représentation complexe, cette loi devient :

$$\underline{u}(t) = \mathrm{j}L\omega.\underline{i}(t).$$

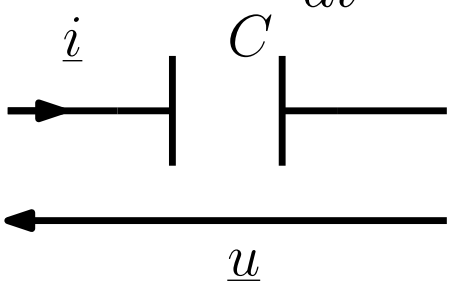
On peut donc introduire l'impédance électrique associée à un inducteur d'inductance L et définie par :

$$\underline{Z}_L(\omega) = \mathrm{j}L\omega.$$

2. Lois essentielles

- **condensateur :** Le comportement d'un condensateur (ou capacitance) de capacité C est décrit par la loi temporelle de Coulomb :

$$i(t) = C.\frac{du(t)}{dt}.$$



En utilisant la représentation complexe, cette loi devient :

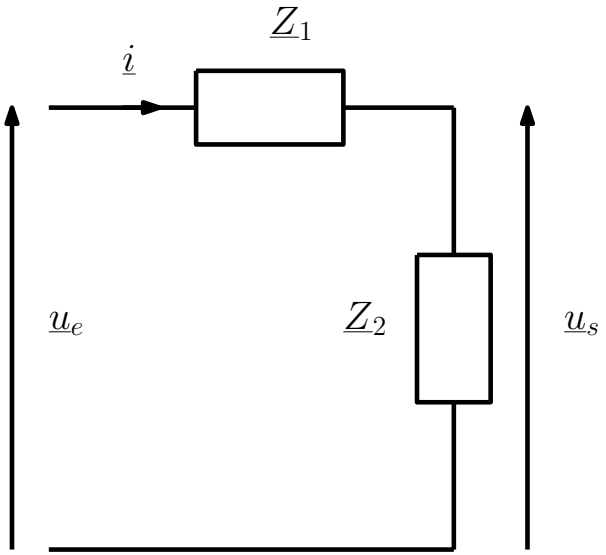
$$\underline{i}(t) = \mathrm{j}C\omega.\underline{u}(t).$$

On peut donc introduire l'impédance électrique associée à un condensateur de capacité C et définie par :

$$\underline{Z}_C(\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}.$$

2. Lois essentielles

2.2. Pont diviseur de tension



Pour le circuit électrique considéré, on peut écrire deux lois utilisant les impédances des composants passifs associées en série $\underline{Z}_1(\omega)$ et $\underline{Z}_2(\omega)$ et donc traversés par la même intensité $\underline{i}(t)$:

- la loi décrivant le composant passif d'impédance $\underline{Z}_2(\omega)$: $\underline{u}_s(t) = \underline{Z}_2(\omega).\underline{i}(t)$;
- la loi de la maille : $\underline{u}_e(t) = \big(\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)\big).\underline{i}(t)$.

2. Lois essentielles

En introduisant $H(\omega)$ la fonction de transfert définie comme le rapport des tensions de sortie $\underline{u}_S(t)$ et d'entrée $\underline{u}_e(t)$, on vérifie que $H(\omega)$ est donnée par :

$$H(\omega) = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)} = \frac{\underline{Z}_2(\omega).\underline{i}(t)}{\left(\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)\right).\underline{i}(t)}$$

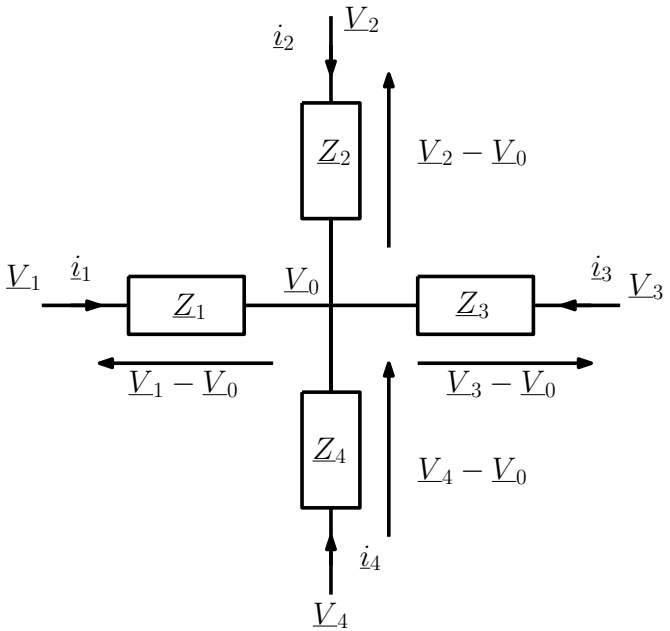
Soit encore :

Pont diviseur de tension

$$H(\omega) = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)} = \frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)}$$

2. Lois essentielles

2.3. Théorème de Millmann



Le comportement de chaque composant passif est décrit par une loi du type $\underline{V}_i(t) - \underline{V}_0(t) = \underline{Z}_i(\omega).\underline{i}_i(t)$ avec :

- $\underline{V}_i(t)$: potentiel du composant i
- $\underline{V}_0(t)$: potentiel de référence pour tous les composants
- $\underline{Z}_i(\omega)$: impédance du composant i
- $\underline{i}_i(t)$: intensité parcourant le composant i

2. Lois essentielles

La loi des nœuds nous dit que la somme des intensités arrivant à un nœud est nulle et, pour le circuit étudié, elle s'écrit encore :

$$\sum_i \underline{i}_i(t) = \sum_i \frac{\underline{V}_i(t) - \underline{V}_0(t)}{\underline{Z}_i(\omega)} = 0$$

Soit encore :

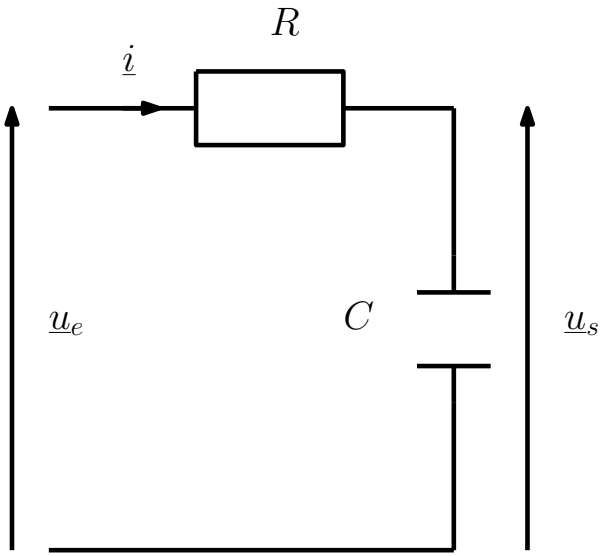
$$\sum_i \frac{\underline{V}_i(t)}{\underline{Z}_i(\omega)} = \sum_i \frac{\underline{V}_0(t)}{\underline{Z}_i(\omega)} = \left(\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i(\omega)}\right).\underline{V}_0(t)$$

Théorème de Millmann

$$\underline{V}_0(t) = \frac{\sum_i \frac{\underline{V}_i(t)}{\underline{Z}_i(\omega)}}{\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i(\omega)}} = \frac{\frac{\underline{V}_1(t)}{\underline{Z}_1(\omega)} + \frac{\underline{V}_2(t)}{\underline{Z}_2(\omega)} + \frac{\underline{V}_3(t)}{\underline{Z}_3(\omega)} + \frac{\underline{V}_4(t)}{\underline{Z}_4(\omega)}}{\frac{1}{\underline{Z}_1(\omega)} + \frac{1}{\underline{Z}_2(\omega)} + \frac{1}{\underline{Z}_3(\omega)} + \frac{1}{\underline{Z}_4(\omega)}}$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

3.1. Filtre RC série



pont diviseur de tension avec $\underline{Z}_1(\omega) = R$ et $\underline{Z}_2(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$

Fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

En introduisant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et la fréquence réduite $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, la fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}} \text{ soit } H(\nu) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\nu}.$$

Si on note $G(\nu)$ le module ou gain de $H(\nu)$, on vérifie que :

$$G(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1 + \nu^2}},$$

dont la dérivée est $G'(\nu) = \dfrac{-\nu}{\left(1 + \nu^2\right)^{3/2}}$

et le gain $G(\nu)$ est décroissant pour $\nu \in \mathbb{R}^+$.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$$H(\nu) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\nu}$$

On définit la fonction asymptote à $H(\nu)$ comme le rapport des termes prépondérants au numérateur et au dénominateur de la fonction de transfert pour la limite testée pour ν.

Pour $\nu \mapsto 0$

- terme prépondérant au numérateur : 1
- terme prépondérant au dénominateur : 1
- fonction asymptote à $H(\nu)$: $H(\nu) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1} = 1$

Pour $\nu \mapsto +\infty$

- terme prépondérant au numérateur : 1
- terme prépondérant au dénominateur : $\mathrm{j}\nu$
- fonction asymptote à $H(\nu)$: $H(\nu) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{j}\nu}$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

On définit le gain en décibels, noté $G_{dB}(\nu)$ comme 20 fois le logarithme décimal du gain $G(\nu)$.

Donc, on a les correspondances suivantes :

- $G(\nu) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}$ donne $G_{dB}(\nu) = -10\log\left(1+\nu^2\right)$

  puisque $\log(1/a) = -\log a$ et $\log(a^n) = n.\log(a)$;

- $H(\nu) \underset{0}{\sim} 1$ donc $G(\nu) \underset{0}{\sim} 1$ et $G_{dB}(\nu) \underset{0}{\sim} 0$;

- $H(\nu) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{j}\nu}$ donc $G(\nu) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\nu}$ et $G_{dB}(\nu) \underset{\infty}{\sim} -20\log(\nu)$.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$G_{dB}(\nu) \underset{0}{\sim} 0$: asymptote horizontale à 0 dB quand $\nu \mapsto 0$

$G_{dB}(\nu) \underset{\infty}{\sim} -20\log(\nu)$: droite asymptote de pente -20 dB par décade (ν multiplié par 10) ou -6 dB par octave (ν multiplié par 2).

car :

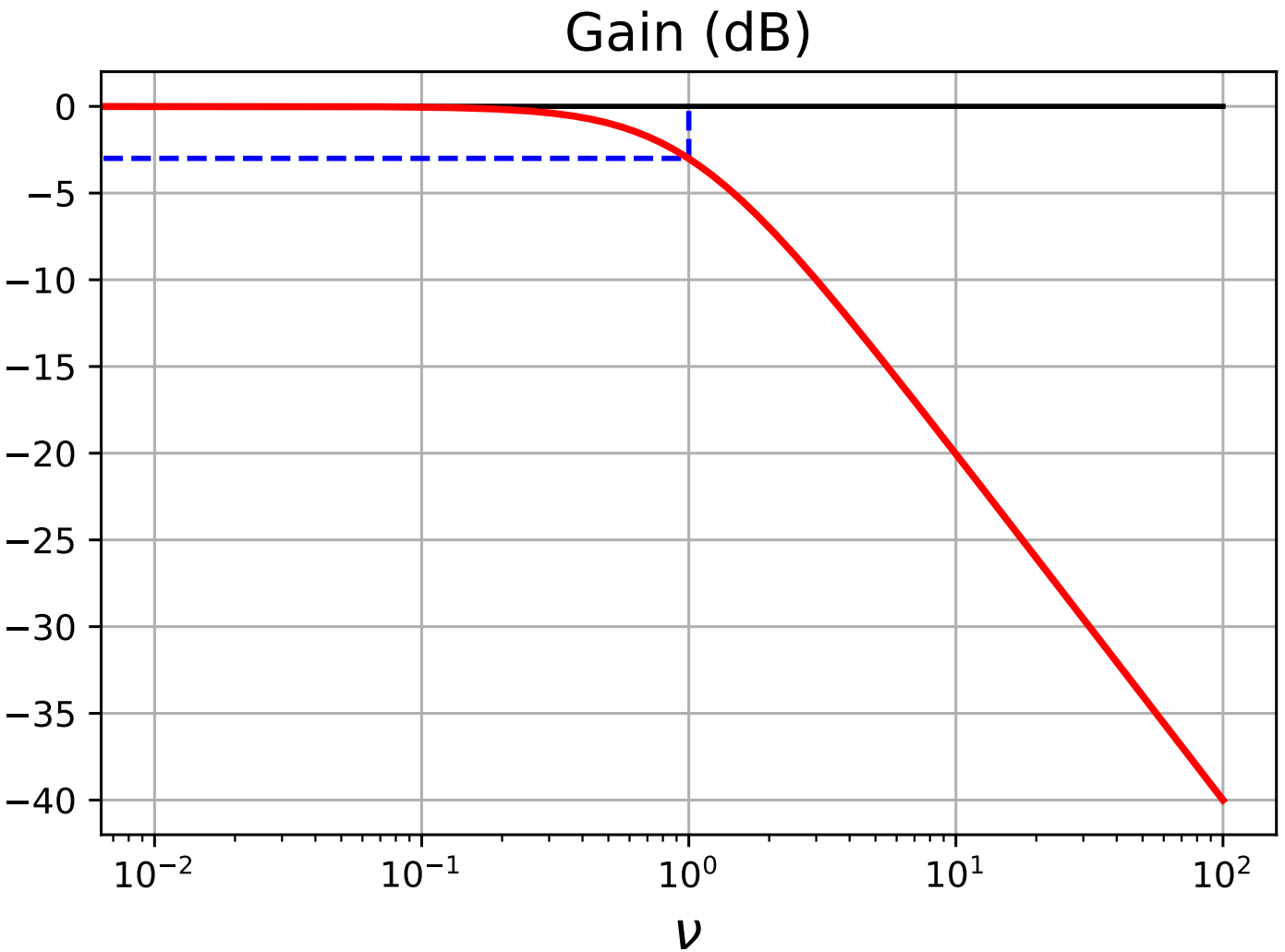
- $20\log(10.\nu) = 20\log(10) + 20\log(\nu) = 20\log(\nu) + 20$ puisque $\log(10) = 1$
- $20\log(2.\nu) = 20\log(2) + 20\log(\nu) \approx 20\log(\nu) + 6$ puisque $20\log(2) \approx 6$

$G(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $G_{dB}(1) = -20\log 2^{1/2} = -10\log 2 \approx -3$

Puisque $\nu = \omega/\omega_0$, on a $G_{dB}(\omega = \omega_0) \approx -3$ et on parle alors de fréquence de coupure en ω_0 à - 3 dB.

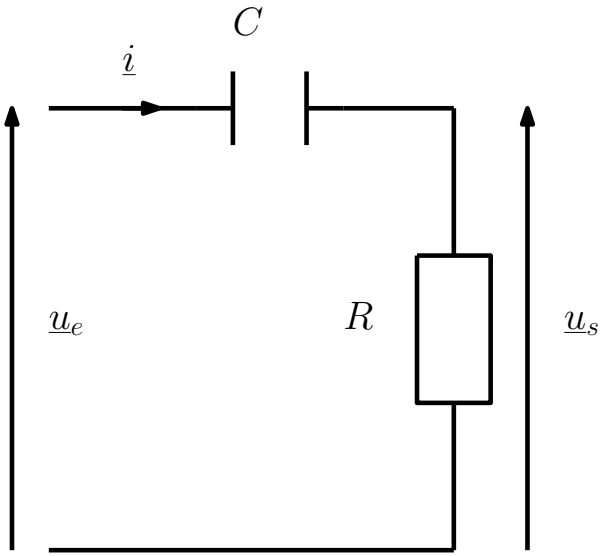
3. Etude de filtres analogiques emblématiques

Tracé du gain en décibels à partir de toutes les informations recueillies :



3. Etude de filtres analogiques emblématiques

3.2. Filtre CR série



pont diviseur de tension avec $\underline{Z}_1(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ et $\underline{Z}_2(\omega) = R$

Fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$$H(\omega) = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

En introduisant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et la fréquence réduite $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, la fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(\nu) = \frac{\mathrm{j}\nu}{1 + \mathrm{j}\nu}$$

Si on note $G(\nu)$ le module ou gain de $H(\nu)$, on vérifie que :

$$G(\nu) = \frac{|\nu|}{\sqrt{1 + \nu^2}}$$

et le gain en décibels est donc égal à, $\nu \in \mathbb{R}^{+\star}$:

$$G_{dB}(\nu) = 20 \log\big(G(\nu)\big) = 20 \log\big(\nu\big) - 10 \log\big(1 + \nu^2\big)$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$$G_{dB}(\nu) = 20\log\big(G(\nu)\big) = 20\log\big(\nu\big) - 10\log\big(1+\nu^2\big)$$

On pourrait refaire toute l'étude pour $G(\nu)$ et $G_{dB}(\nu)$ comme pour le filtre RC série.

Mais, si on regarde l'expression de $G_{dB}(\nu)$, on constate qu'elle correspond à celle pour le filtre RC série à laquelle on ajoute $20\log(\nu)$.

Il suffit donc de rajouter la contribution de $20\log(\nu)$ au tracé du gain en dB pour le filtre RC série.

Cela revient à ajouter une droite coupant l'axe des abcisses en $\nu = 1$ et de pente $+6$ dB par octave (ou $+10$ dB par décade).

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

$$G_{dB}(\nu) = 20\log\big(G(\nu)\big) = 20\log\big(\nu\big) - 10\log\big(1+\nu^2\big)$$

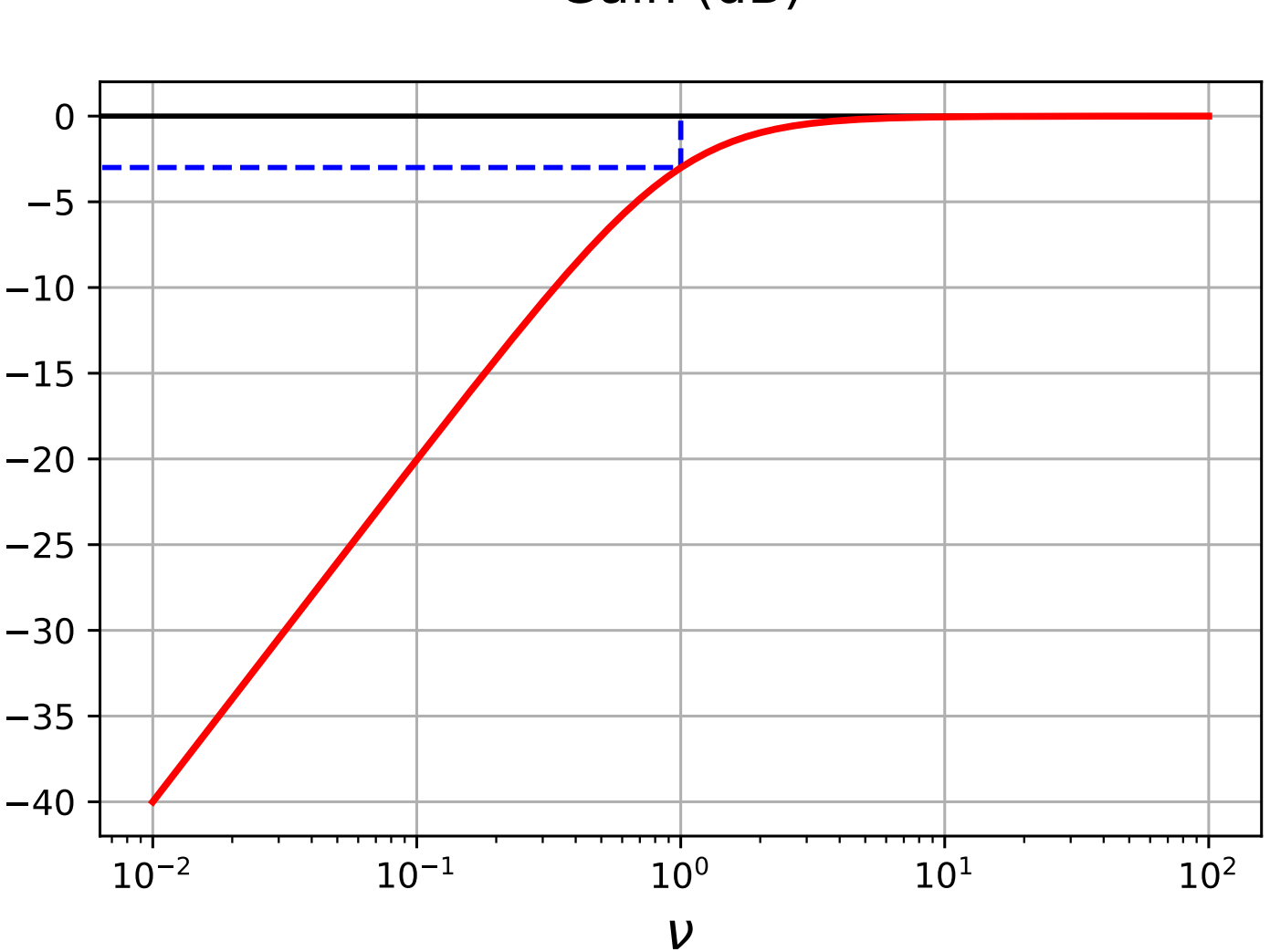
Pour les asymptotes, on a donc :

- $G_{dB}(\nu) \underset{0}{\sim} 0 + 20\log(\nu) = 20\log(\nu)$: droite asymptote de pente +20 dB par décade (ν multiplié par 10) ou 6 dB par octave (ν multiplié par 2).
- $G_{dB}(\nu) \underset{\infty}{\sim} -20\log(\nu) + 20\log(\nu) = 0$: asymptote horizontale à 0 dB quand $\nu \mapsto +\infty$

On a encore $G(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $G_{dB}(1) = -20\log 2^{1/2} \approx -3$ c'est-à-dire une fréquence de coupure en $\omega = \omega_0$ à -3 dB.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

Tracé du gain en décibels à partir de toutes les informations recueillies :



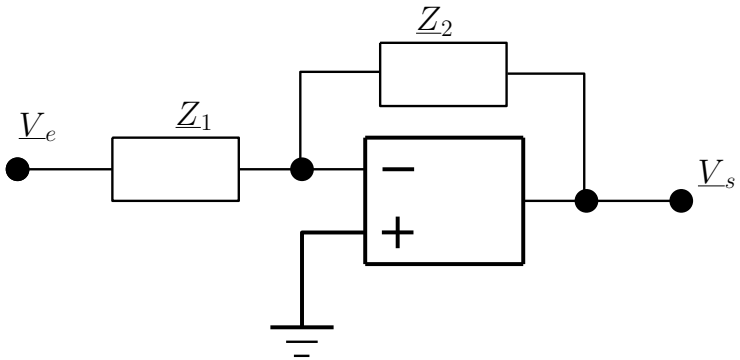
3. Etude de filtres analogiques emblématiques

Exercices : Pour vérifier si vous avez bien compris ce qui précède, vous pouvez étudiez le comportement des filtres suivants correspondant à d'autres déclinaisons du pont diviseur de tension :

- $\underline{Z}_1$ correspondant à une capacité et $\underline{Z}_2$ correspondant à l'association RL série ;
- $\underline{Z}_1$ correspondant à l'association RC série et $\underline{Z}_2$ correspondant à un inducteur ;
- $\underline{Z}_1$ correspondant à l'association LC série et $\underline{Z}_2$ correspondant à une résistance ;
- $\underline{Z}_1$ correspondant à une résistance et $\underline{Z}_2$ correspondant à l'association LC série.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

3.3. Utilisation du théorème de Millmann



On considère un montage avec un amplificateur opérationnel idéal avec deux impédances $\underline{Z}_1(\omega)$ et $\underline{Z}_2(\omega)$ respectivement placées sur l'entrée inverseuse et la rétroaction de la sortie sur l'entrée inverseuse.

On suppose que la tension aux bornes en entrée de l'amplificateur est nulle et que l'entrée non inverseuse est reliée à la masse et donc de potentiel $\underline{V}_0$ nul.

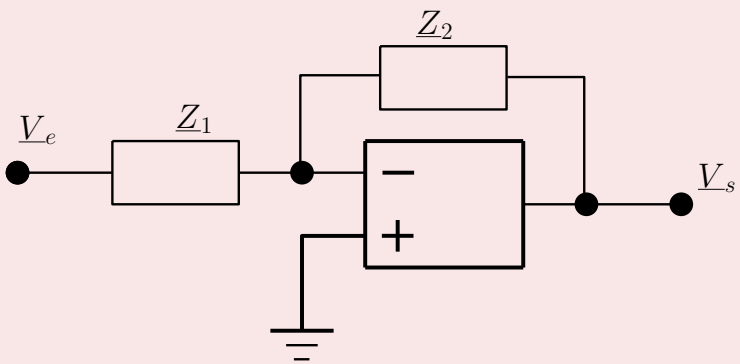
On suppose que le potentiel en entrée vaut $\underline{V}_e$ et que le potentiel en sortie vaut $\underline{V}_s$.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

En utilisant le théorème de Millmann, on peut donc écrire pour $\underline{V}_0$:

$$\underline{V}_0 = \frac{\dfrac{\underline{V}_e}{\underline{Z}_1(\omega)} + \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{Z}_2(\omega)}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1(\omega)} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2(\omega)}}$$

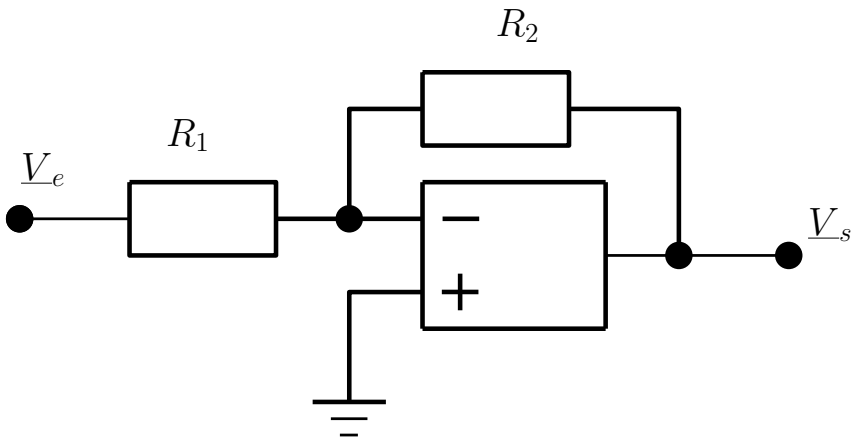
Soit au final



$$H(\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega)}$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

- montage inverseur



Pour le montage inverseur, on a :

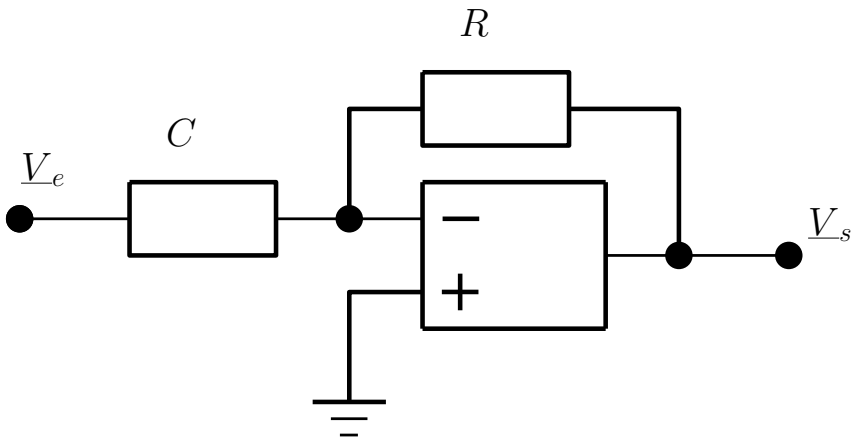
- $\underline{Z}_1(\omega) = R_1$;
- $\underline{Z}_2(\omega) = R_2$.

La fonction de transfert est donc donnée par :

$$H(\omega) = -\frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega)} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

- montage dérivateur



Pour le montage dérivateur, on a :

- $\underline{Z}_1(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$;
- $\underline{Z}_2(\omega) = R$.

La fonction de transfert est donc donnée par :

$$H(\omega) = -\frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega)} = -\frac{R}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = -\mathrm{j}RC\omega.$$

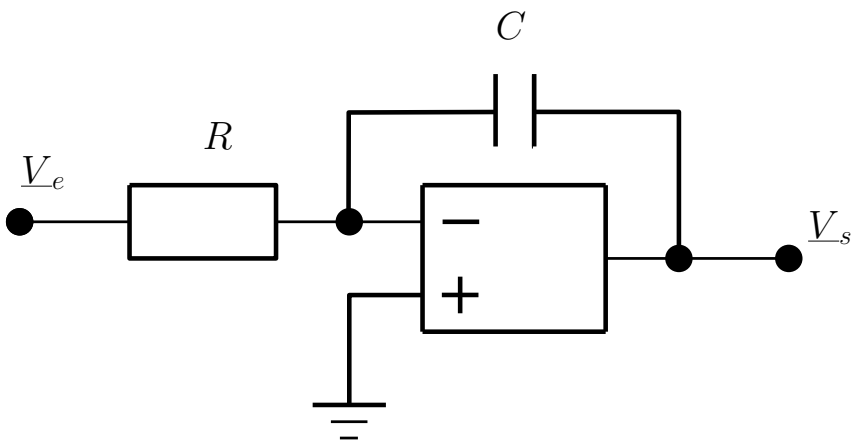
3. Etude de filtres analogiques emblématiques

Exercice : Soit $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$:

- calculez le gain $G(\nu)$ et le gain en décibels $G_{dB}(\nu)$;
- déterminez les fonctions asymptotes en 0 et $+\infty$;
- tracez les asymptotes ainsi que l'allure du gain en décibels.

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

- montage intégrateur



Pour le montage intégrateur, on a :

- $\underline{Z}_1(\omega) = R$;
- $\underline{Z}_2(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$.

La fonction de transfert est donc donnée par :

$$H(\omega) = -\frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega)} = -\frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R} = -\frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$$

3. Etude de filtres analogiques emblématiques

Exercice : Soit $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $\nu = \dfrac{\omega}{\omega_0}$:

- calculez le gain $G(\nu)$ et le gain en décibels $G_{dB}(\nu)$;
- déterminez les fonctions asymptotes en 0 et $+\infty$;
- tracez les asymptotes ainsi que l'allure du gain en décibels.

Autres idées d'exercices : pour vous assurer que vous avez bien compris comment utiliser le théorème de Millmann, retrouvez les fonctions de transfert des montages différentiateur, non inverseur, sommateur inverseur.